Récap cours 2024-2025

Ravi Kunjwal LIS cours 1 : Quantum in pictures

Oscar Derfrain : Algorithmes d’énumération : tester efficacement ses algorithmes et conjectures.

Christophe Pittet/Michael Puschnigg : Fibrés et classes caractéristiques.

Bruno Schapira : Intersections de marches aľ eatoires

Dimitri Ara : Introduction à la théorie des quasi-catégories

Raphael Beuzart-Pleussis : Introduction aux D-modules

Ravi Kunjwal

Course I: Quantum in Pictures

Langage : English
Matin : 6 séances 2h CM
Après-midi : 3 séances de TD de 2h chacun
Totale = 24h TD (idéalement à tenir en 2 semaines) note : 1h CM = 1h30 (HTD)

This will be a crash course in quantum theory that requires almost no prior knowledge beyond high-school mathematics and an ability to draw and reason with simple pictures. Based on the “little brother” (Quantum in Pictures [1]) of the the “Dodo book” (Picturing Quantum Processes [2]), this course is aimed at two sets of doctoral students: 1) those who want to learn a bit about quantum computing and related topics but have no prior exposure to quantum theory, and 2) those who know quantum theory but have no prior exposure to diagrammatic ways of thinking about quantum theory (“categorical quantum mechanics”), pioneered by Bob Coecke and Samson Abramsky [3,4]. I hope this course will give the students a sense of this way of thinking about quantum theory and will encourage a deeper exploration of the topic [2].

The course will consist of six 2-hour lectures (CM) and three 2-hour exercise sessions (TD) for a total duration equivalent to 24 HTD. It will last two weeks, with three lectures per week, and an exercise session at the end of every second lecture, i.e, one TD in the first week and two TD in the second week.

References:

1. Quantum in Pictures, by Bob Coecke and Stefano Gogioso, Quantinuum (2022).
2. Picturing Quantum Processes, by Bob Coecke and Aleks Kissinger, Cambridge

University Press (2017).

3. A categorical semantics of quantum protocols, by Samson Abramsky and Bob Coecke, Proceedings of the 19th IEEE conference on Logic in Computer Science (LiCS'04). IEEE Computer Science Press (2004), arXiv:quant-ph/0402130.

4. Kindergarten Quantum Mechanics, by Bob Coecke, arXiv:quant-ph/0510032 (2005).

Intervenant : Oscar Defrain (LIS, équipe ACRO)

Intitulé : Algorithmes d'énumération : tester efficacement ses algorithmes et conjectures.

En algorithmique d'énumération, le but est de lister efficacement tous les objets ou solutions à un problème. Ceci peut être utile en vue d'exploiter ces solutions, en vue de tester ses algorithmes sur un grand nombre de données, ou bien pour vérifier ses conjectures sur un maximum de valeurs. Étant donné le grand nombre d'objets à générer (typiquement exponentiel en la taille de l'entrée) exiger d'un algorithme d'énumération qu'il s'exécute en temps polynomial est vain. Plutôt, on cherchera soit à obtenir de petit temps exponentiels (approche dite « input-sensitive »), soit à générer les solutions en un temps polynomial en la taille de l'entrée et du nombre de solutions (approche dite « output-sensitive »). Dans la première approche, l'idée est de minimiser la base de l'exponentielle, avec pour borne inférieure le nombre de solutions. Dans la seconde approche, on cherchera typiquement à garantir un petit délai entre solutions consécutives.

L'objectif de ce cours est d'introduire les concepts généraux de l'énumération, de présenter quelques techniques algorithmiques pour chacune de ces deux approches, ainsi que leur impact dans des domaines variés de l'informatique ; seront évoqués également quelques aspects d'implémentations.

I. Concepts généraux de l'énumération : définitions, complexités et réductions.

II. Approche input-sensitive : exemples, techniques de génération et impacts.

III. Approche output-sensitive : exemples, techniques de génération et impacts.

IV. Aspects d'implémentations.

Références :

[1] Johnson, D. S., Yannakakis, M., & Papadimitriou, C. H. (1988). On generating all maximal independent sets. Information Processing Letters, 27(3), 119-123.
[2] Fomin, F.V., Kratsch, D. (2010). Exact Exponential Algorithms, Springer.

[3] Strozecki, Y. (2019). Enumeration complexity. Bulletin of EATCS, 3(129)

Ch. Pittet et M. Puschnigg

Titre : Fibrés et classes caractéristiques.

La théorie des fibrés (vectoriels et principaux) et de leurs classes caractéristiques présente un grand intérêt intrinsèque. Elle apporte des outils sophistiqués et indispensables en topologie, en géométrie différentielle, en géométrie complexe, en géométrie algébrique, et en physique théorique (théories de jauge). Le but du cours est d'apporter aux doctorants intéressés une connaissance approfondie de ce riche domaine des mathématiques.

Premier semestre : Théorie générale des classes caractéristiques (par M. Puschnigg)

Chapitre 1 : Éléments de la théorie d'homotopie et de la topologie algébrique
Chapitre 2 : Fibrés et leurs espaces classifiants
Chapitre 3 : Classes de Chern, classes de Pontryagin et la classe d'Euler du point de vue homotopique
Chapitre 4: Exemples et applications: la forme d'intersection d'une surface K3, sphères exotiques, ...

Second semestre : Fibrés principaux, connexions et courbures, théorie de Chern-Weil (par Ch. Pittet)

Chapitre 1 : Variétés différentiables, groupes et algèbres de Lie, formes différentielles, cohomologie de de Rham
Chapitre 2 : Fibrés principaux, connexion et courbure, transgression
Chapitre 3 : Théorème de Chern-Weil, polynômes invariants et classes de Chern, de Pontryagin, d'Euler, théorème de Gauss-Bonnet généralisé, anomalies, ...

Bruno Schapira

Titre : Intersections de marches aléatoires

Le but du cours sera de présenter quelques résultats fondamentaux dans l'étude des marches aléatoires sur le réseau Euclidien Z^d, notamment concernant leur récurrence ou transience, et les propriétés d'intersection ou de non-intersection de plusieurs marches aléatoires. C'est une question fondamentale en théorie des probabilités qui a également des répercussions importantes en physique statistique.

Il est bien connu que la marche aléatoire simple est récurrente en dimension 1 et 2, et transiente en dimension 3 et plus, dans le sens ou` si $d \leq 2$, une marche aléatoire repasse infiniment souvent en tous les points de l'espace presque sûrement, alors qu'en dimension 3 et plus, elle ne passe qu'au plus un nombre fini de fois en tout point presque sûrement.

Une question très reliée est de savoir, étant donné deux marches aléatoires indépendantes, quel est le nombre de points de l'espace qui sont visités par les deux marches. Un résultat célèbre d'Erdos et Taylor, datant des années 70, montre que ce nombre est infini presque sûrement en dimension inférieure ou égale `a 4, alors qu'il est fini presque sûrement en dimension 5 et plus.

Le but du cours sera de donner une (ou plusieurs) démonstration(s) de ces deux résultats, et si le temps le permet d'aborder la question plus difficile d'estimer la probabilité́ e que deux marches aléatoires ne se rencontrent jamais.

En particulier, le cours sera l'occasion de voir ou revoir certaines notions fondamentales en probabilités comme les sommes de variables aléatoires indépendantes, l'inégalité de Chebyshev, la méthode du second moment, et certains outils cĺ es dans l' étude des marches aléatoires, comme la fonction de Green.

Dimitri ARA

Introduction à la théorie des quasi-catégories

En mathématiques, on étudie généralement des objets à isomorphisme près. Il arrive que l'on veuille identifier des objets s'ils sont reliés par certains morphismes qui ne sont pas nécessairement des isomorphismes, par exemple les équivalences d'homotopie en topologie, ou les quasi-isomorphismes en algèbre homologique. Dans cette situation, on est tenté de localiser, c'est-à-dire d'inverser formellement ces morphismes ; on obtient alors dans les exemples cités la catégorie homotopique et la catégorie dérivée. Néanmoins cette opération est trop brutale et engendre de nombreux problèmes, l'un des plus célèbres étant la non-fonctorialité du cône dans le cas de la catégorie dérivée.

La théorie des catégories supérieures, et plus précisément des (infini, 1)-catégories, apporte une solution à ce problème. L'opération de localisation ne doit pas être appliquée dans le monde des catégories mais dans celui plus laxe des (infini, 1)-catégories, qui sont moralement des catégories dans lesquelles les ensembles de morphismes sont remplacés par des espaces.

Le but du cours est de présenter une des incarnations des (infini, 1)-catégories, les quasi-catégories de Joyal, fortement développées par Lurie sous le nom de infini-catégories. Cette théorie est basée sur la catégorie des ensembles simpliciaux qui jouera un rôle central dans ce cours. Nous étudierons les catégories de modèles, introduites par Quillen, qui sont une des notions clés de la théorie de l'homotopie abstraite. Nous présenterons la structure de catégorie de modèles de Joyal pour les quasi-catégories. Enfin, nous étudierons la théorie élémentaire des quasi-catégories (adjonctions, limites, etc.)

Raphael Beuzart-Plessis : Introduction aux D-modules

Résumé: Les D-modules peut être vue comme une approche des aspects purement algébriques des EDP linéaires. Cette théorie a été développée dans les années 60 indépendamment par l'école "japonaise" (en particulier Kashiwara) et russe (essentiellement J. Bernstein). Ce cours se placera dans le cadre des variétés algébriques complexes avec pour plan provisoire, très vague, le suivant:

-résultats de bases sur les D-modules (définitions générales, notion de support singulier, l'involutivité des caractéristiques...)
-D-modules holonomes réguliers (notion importante correspondant grosso modo aux systèmes d'EDP linéaires sur-déterminés)
-L'objectif principal sera alors d'énoncer et établir la correspondance de Riemann-Hilbert, qui peut être vue comme une réponse (sophistiquée) au 21ème problème de Hilbert.

Ce cours serait aussi l'occasion d'apprendre, ou de revoir, certains concepts importants comme les faisceaux ou les techniques et résultats de bases en algèbre homologique. Enfin, si le temps le permet, et en fonction des intérêts de l'auditoire, on pourra discuter de certaines applications ou développements naturels tels que les faisceaux pervers ou la preuve de la conjecture de Kazhdan-Lusztig par Beilinson-Bernstein.